

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ТИПА ТИПА ГУРСА-ДАРБУ

М.А. Садыгов

Институт Прикладной Математики при Бакинском Государственном Университете,
Баку, Азербайджан
e-mail: misreddin08@rambler.ru

Абстракт. В работе рассматривается выпуклая экстремальная задача для дифференциальных включений типа Гурса-Дарбу специального вида и получено необходимое и достаточное условие оптимальности ее решения. В выпуклой экстремальной задаче для дифференциальных включений типа Гурса-Дарбу сначала рассматривается возмущенная задача, с ее помощью строится двойственная задача, и, наконец, используя субдифференциал функционала специального вида в пространстве абсолютно непрерывных и двумерных абсолютно непрерывных функций получается необходимое и достаточное условие экстремума.

Ключевые слова: Отображение, Банахово пространство, включение, функция.

AMS Subject Classification: 49J52.

1. Введение

Методика, использованная в работе, впервые была применена автором к однопеременной выпуклой экстремальной задаче для дифференциальных включений в классе абсолютно непрерывных функций (см.[6]). Та же методология автором была применена к большому числу выпуклых экстремальных задач для дифференциальных включений с многими переменными (см. [7-11]). Экстремальная задача для дифференциальных включений типа Гурса-Дарбу в классе двумерных абсолютно непрерывных функций рассматривалась в работах [8, 11] и [15]. В работе экстремальная задача для дифференциальных включений типа Гурса-Дарбу в специального вида рассматривается в классе двумерных абсолютно непрерывных функций. В выпуклой экстремальной задаче для дифференциальных включений типа Гурса-Дарбу сначала рассматривается возмущенная задача, с ее помощью строится двойственная задача, используется субдифференциал функционала специального вида в пространстве абсолютно непрерывных и двумерных абсолютно непрерывных функций и, наконец, с ее помощью получается необходимое и достаточное условие экстремума. Вариационная задача типа Гурса-Дарбу играет важную роль при исследовании экстремальной задачи для дифференциального включения типа Гурса-Дарбу (см.[10]). Настоящая работа является продолжением работы [12] автора.

Работа состоит из двух разделов. Во втором разделе рассматривается выпуклая экстремальная задача для дифференциальных включений типа Гурса-Дарбу специального вида и получено необходимое и достаточное условие экстремума.

Если $1 \leq p \leq \infty$, $d \in \mathbb{R}^n$, $x(\cdot) \in L_p^n[0,1]$, $y(\cdot) \in L_p^n[0,1]$ и $z(\cdot) \in L_p^n([0,1] \times [0,1])$, то множество функции которые имеют вид

$$u(t,s) = d + \int_0^t x(\tau) d\tau + \int_0^s y(v) dv + \int_0^t \int_0^s z(\tau,v) d\tau dv$$

обозначается через $A_p^n([0,1] \times [0,1])$, где $t \in [0,1]$, $s \in [0,1]$.

Отсюда следует, что $u(0,0) = d$, $u_t(t,0) = x(t)$, $u_s(0,s) = y(s)$ и $u_{ts}(t,s) = z(t,s)$.

Функция, входящая в линейное пространство $A_1^n([0,1] \times [0,1])$, называется двумерной абсолютно непрерывной функцией.

Из определения следует, что функция $u(t,s)$ однозначно определяется через $d \in \mathbb{R}^n$, $x(\cdot) \in L_p^n[0,1]$, $y(\cdot) \in L_p^n[0,1]$ и $z(\cdot) \in L_p^n([0,1] \times [0,1])$. Поэтому функция $u(t,s)$ обозначается через $(d, x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))$. Отсюда следует, что между сопряженным пространством пространства $A_p^n([0,1] \times [0,1])$ и сопряженным пространством пространства $\mathbb{R}^n \times L_p^n[0,1] \times L_p^n[0,1] \times L_p^n([0,1] \times [0,1])$ имеется взаимно однозначное соответствие. Поэтому существуют

$$(c, a(\cdot), b(\cdot), v(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times L_{p'}^n[0,1] \times L_{p'}^n[0,1] \times L_{p'}^n([0,1] \times [0,1]), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

такие, что каждый линейный непрерывный функционал v^* на $A_p^n([0,1] \times [0,1])$, $1 \leq p < \infty$, (т.е. $v^* \in A_p^n([0,1] \times [0,1])^*$) имеет вид:

$$v^*(u) = (c|u(0,0)) + \int_0^1 (a(t)|u_t(t,0))dt + \int_0^1 (b(s)|u_s(0,s))ds + \int_0^1 \int_0^1 (v(t,s)|u_{ts}(t,s))dtds,$$

где $(a|b)$ скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Для простоты функционал v^* обозначается через $(c, a(\cdot), b(\cdot), v(\cdot))$, т.е. $v^* = (c, a(\cdot), b(\cdot), v(\cdot))$.

Символом $W_{p,1}^n[0,1]$ обозначается банахово пространство абсолютно непрерывных отображений отрезка $[0,1]$ в $\mathbb{R}^n$, первая производная которых принадлежит $L_p^n[0,1]$.

Пусть D метрическое пространство. Через $\text{fm}(D)$ обозначается векторное пространство всех мер Радона в D (см.[2, с.65]).

Аналогично можно рассмотреть пространство $A_p^n([t_0, T] \times [s_0, S])$, $1 \leq p \leq \infty$, где $t_0 < T$, $s_0 < S$.

В дальнейшем равенства и включения, связанные с измеримыми функциями или отображениями понимаются как почти всюду.

2 Об экстремальной задаче для выпуклых дифференциальных включений типа Гурса-Дарбу.

Для простоты далее считаем, что $T=1$, $S=1$. Обозначим через $P(R^n)$ ($\text{comp}(R^n)$) совокупность всех компактных (непустых компактных) подмножеств R^n . Пусть $a_0 : [0,1] \times [0,1] \times R^n \rightarrow P(R^n)$, $b_1 : [0,1] \times R^n \rightarrow P(R^n)$, $b_2 : [0,1] \times R^n \rightarrow P(R^n)$, $M_0 \subset R^n$, $A_1(t,s)$ и $A_2(t,s)$ непрерывные $n \times n$ матрицы, $x \rightarrow a_0(t,s,x)$ выпуклое отображение.

Функция $u(\cdot) \in A_1^n([0,1] \times [0,1])$, удовлетворяющая включениям

$$\begin{aligned} A_1(t,s)u_t(t,s) + A_2(t,s)u_s(t,s) + u_{ts}(t,s) &\in a_0(t,s,u(t,s)), \\ u_t(t,0) &\in b_1(t,u(t,0)), \quad u_s(0,s) \in b_2(s,u(0,s)), \quad u(0,0) \in M_0 \end{aligned} \quad (1)$$

для почти всех $t,s \in [0,1]$, называется решением задачи (1).

Пусть $f_0 : [0,1] \times [0,1] \times R^{2n} \rightarrow R_{+\infty}$, $\varphi_1 : [0,1] \times R^{2n} \rightarrow R_{+\infty}$, $\varphi_2 : [0,1] \times R^{2n} \rightarrow R_{+\infty}$ выпуклые нормальные интегранты, $q : R^{4n} \rightarrow R_{+\infty}$ собственная выпуклая функция.

Рассмотрим минимизации функционала

$$\begin{aligned} J_0(u) = & \int_0^1 \int_0^1 f_0(t,s,u(t,s), A_1(t,s)u_t(t,s) + A_2(t,s)u_s(t,s) + u_{ts}(t,s)) dt ds + \int_0^1 \varphi_1(t, u(t,0), u_t(t,0)) dt + \\ & + \int_0^1 \varphi_2(s, u(0,s), u_s(0,s)) ds + q(u(0,0), u(1,0), u(0,1), u(1,1)) \end{aligned} \quad (2)$$

среди всех решением задачи (1).

Обозначи $\omega_0(t,s,x,z) = \delta_{\text{gr} a_0(t,s)}(x,z)$, $\omega_1(t,x,y_1) = \delta_{\text{gr} b_1(t,s)}(x,y_1)$, $\omega_2(s,x,y_2) = \delta_{\text{gr} b_2(t,s)}(x,y_2)$, $\omega_0(x) = \delta_{M_0}(x)$, где $\delta_{\tilde{M}}(u)$ индикаторная функция множества $\tilde{M}$.

Задача (1), (2) эквивалентна следующей задаче:

$$\begin{aligned} J(u) = & \int_0^1 \int_0^1 \bar{f}_0(t,s,u(t,s), A_1(t,s)u_t(t,s) + A_2(t,s)u_s(t,s) + u_{ts}(t,s)) dt ds + \int_0^1 \bar{\varphi}_1(t, u(t,0), u_t(t,0)) dt + \\ & + \int_0^1 \bar{\varphi}_2(s, u(0,s), u_s(0,s)) ds + \bar{q}(u(0,0), u(1,0), u(0,1), u(1,1)) \xrightarrow{u(\cdot) \in A_1^n([0,1] \times [0,1])} \inf, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\bar{f}_0(t,s,x,z) = f_0(t,s,x,z) + \omega_0(t,s,x,z)$, $\bar{\varphi}_1(t,x,y_1) = \varphi_1(t,x,y_1) + \omega_1(t,x,y_1)$, $\bar{\varphi}_2(s,x,y_2) = \varphi_2(s,x,y_2) + \omega_2(s,x,y_2)$, $\bar{q}(x,y,z,u) = q(x,y,z,u) + \omega_0(x)$.

Из теоремы 2.1.1 и следствия 2.1.1[10] следует, что существует решение уравнения $A_1(t,s)z_t(t,s) + A_2(t,s)z_s(t,s) + z_{ts}(t,s) = y(t,s)$ при $y(\cdot) \in L_1^n([0,1] \times [0,1])$, $z(t,0) = \psi_1(t)$, $z(0,s) = \psi_2(s)$, где $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,1]$, $\psi_2(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,1]$, $\psi_1(0) = \psi_2(0)$. Поэтому

$$\begin{aligned} M = & \{(u(\cdot), z_t(t,0), z_s(0,s), A_1(t,s)z_t(t,s) + A_2(t,s)z_s(t,s) + z_{ts}(t,s)) : (u(\cdot), z(\cdot)) \in \\ & = A_1^n([0,1] \times [0,1]) \times A_1^n([0,1] \times [0,1])\} = A_1^n([0,1] \times [0,1]) \times L_1^n[0,1] \times L_1^n[0,1] \times L_1^n([0,1] \times [0,1]). \end{aligned}$$

Обозначим

$$I(u(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot), y(\cdot)) = \int_0^1 \int_0^1 \bar{f}_0(t, s, u(t, s), y(t, s)) dt ds + \int_0^1 \bar{\varphi}_1(t, u(t, 0), y_1(t)) dt + \\ + \int_0^1 \bar{\varphi}_2(s, u(0, s), y_2(s)) ds + \bar{q}(u(0, 0), u(1, 0), u(0, 1), u(1, 1)),$$

$$\text{dom} I(u(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot), y(\cdot)) = \{(u(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot), y(\cdot)) \in$$

$$\in A_1^n([0, 1] \times [0, 1]) \times L_1^n[0, 1] \times L_1^n[0, 1] \times L_1^n([0, 1] \times [0, 1]) : I(u(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot), y(\cdot)) < +\infty\}.$$

Тогда имеем, что

$$\text{dom} I(u(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot), y(\cdot)) - M = A_1^n([0, 1] \times [0, 1]) \times L_1^n[0, 1] \times L_1^n[0, 1] \times L_1^n([0, 1] \times [0, 1])$$

при $\text{dom} I(u(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot), y(\cdot)) \neq \emptyset$.

Обозначим

$$\bar{f}_0^0(t, s, y, v) = \inf\{w|v\} + \bar{f}_0(t, s, y, w) : w \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\bar{\varphi}_1^0(t, y, v_1) = \inf\{w_1|v_1\} + \bar{\varphi}_1(t, y, w_1) : w_1 \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\bar{\varphi}_2^0(s, y, v_2) = \inf\{w_2|v_2\} + \bar{\varphi}_2(s, y, w_2) : w_2 \in \mathbb{R}^n\},$$

где $v \in \mathbb{R}^n$, $v_1 \in \mathbb{R}^n$, $v_2 \in \mathbb{R}^n$.

Положим

$$\Phi(u, z) = \int_0^1 \int_0^1 \bar{f}_0(t, s, u(t, s), A_1(t, s)(u_t(t, s) + z_t(t, s)) + A_2(t, s)(u_s(t, s) + z_s(t, s)) + u_{ts}(t, s) + z_{ts}(t, s)) dt ds + \\ + \int_0^1 \bar{\varphi}_1(t, u(t, 0), u_t(t, 0) + z_t(t, 0)) dt + \int_0^1 \bar{\varphi}_2(s, u(0, s), u_s(0, s) + z_s(0, s)) ds + \bar{q}(u(0, 0), u(1, 0), u(0, 1), u(1, 1)).$$

Ясно, что Φ -выпуклый функционал по (u, z) и $\Phi(u, 0) = J(u)$. Для любого $z(\cdot) \in \bar{A}_1^n([0, 1] \times [0, 1])$ рассмотрим задачу минимизации

$$\inf_{u \in A_1^n([0, 1] \times [0, 1])} \Phi(u, z). \quad (4)$$

Задача (4) называется возмущением задачи (3). Задача

$$\sup_{z^* \in \bar{A}_1^n([0, 1] \times [0, 1])^*} \{-\Phi^*(0, z^*)\}, \quad (5)$$

называется двойственной к (3) по отношению к заданной функции Φ . Легко проверяется, что

$$\sup_{z^* \in \bar{A}_1^n([0, 1] \times [0, 1])^*} \{-\Phi^*(0, z^*)\} \leq \inf_{u \in A_1^n([0, 1] \times [0, 1])} \Phi(u, 0). \quad \text{Но особый}$$

интерес представляет равенство

$$\sup_{z^* \in \bar{A}_1^n([0, 1] \times [0, 1])^*} \{-\Phi^*(0, z^*)\} = \inf_{u \in A_1^n([0, 1] \times [0, 1])} \Phi(u, 0). \quad (6)$$

Положим $h(z) = \inf\{\Phi(u, z) : u \in A_1^n([0, 1] \times [0, 1])\}$. По предложению 2.5[4] h выпуклая функция. Задача (3) называется стабильной, если $h(0)$ конечно и h субдифференцируема в нуле. Из предложения 3.2.2 и замечания 3.2.3[14] следует, что если задача (3) стабильна, то соотношение (6) удовлетворяется и задача (5) имеет, по меньшей мере, одно решение.

Положим $\text{gra}_{0(t,s)} = \{(u, y) : y \in a_0(t, s, u)\}$, $\|U\| = \sup\{\|u\| : u \in U\}$, $\|\emptyset\| = 0$.

Замечание 21. Если $a_0 : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$, отображение $u \rightarrow a_0(t, s, u)$ замкнуто и выпукло почти при всех $(t, s) \in [0,1] \times [0,1]$, т.е. $\text{gra}_{a_0(t,s)}$ замкнуто и выпукло почти при всех $(t, s) \in [0,1] \times [0,1]$ и существует такая функция $\lambda(t, s)$, что $\|a_0(t, s, u)\| \leq \lambda(t, s)(1 + \|u\|)$ при $u \in \Omega_{(t,s)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - u(t, s)\| \leq \varepsilon\}$, $u : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывная функция, $\Omega_{(t,s)} \subset \text{dom } a_{0(t,s)} = \{y \in \mathbb{R}^n : a_0(t, s, y) \neq \emptyset\}$, то из теоремы 3.1.2[5] следует, что $\rho_x(a_0(t, s, y), a_0(t, s, u)) \leq 2\lambda(t, s) \frac{(1 + \|u(t, s)\| + 0,75\varepsilon)}{0,5\varepsilon} \|y - u\|$ при $y, u \in \mathbb{R}^n$, $\|u - u(t, s)\| \leq 0,25\varepsilon$, $\|y - u(t, s)\| \leq 0,25\varepsilon$.

Замечание 22. Если $a_0 : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, отображение $u \rightarrow a_0(t, s, u)$ замкнуто и выпукло почти при всех $(t, s) \in [0,1] \times [0,1]$ и существует такая функция $\lambda(t, s)$, что $\|a_0(t, s, u)\| \leq \lambda(t, s)(1 + \|u\|)$ при $u \in \mathbb{R}^n$, где $\|a_0(t, s, u)\| = \sup\{\|y\| : y \in a_0(t, s, u)\}$, то из теоремы 3.1.3[5] следует, что $\rho_x(a_0(t, s, y), a_0(t, s, u)) \leq 2\lambda(t, s)\|y - u\|$ при $y, u \in \mathbb{R}^n$.

Если отображение $u \rightarrow a_0(t, s, u)$ замкнуто почти во всех (t, s) и $\|a_0(t, s, u)\| \leq \lambda(t, s)(1 + \|u\|)$, то из теоремы 1.2.32[1] следует, что отображение $u \rightarrow a(t, s, u)$ полунепрерывно сверху почти при всех (t, s) .

Если $a(t, s, x, y_1, y_2) = a_0(t, s, x) - A_1(t, s)y_1 - A_2(t, s)y_2$, где $A_1(t, s)$ и $A_2(t, s)$ $n \times n$ матрицы, отображение $\rho_x(a_0(t, s, x_1), a_0(t, s, x_2)) \leq k(t, s)\|x_1 - x_2\|$ при $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, то из определения метрики Хасдорфа следует, что

$\rho_x(a(t, s, x_1, y_1, z_1), a(t, s, x_2, y_2, z_2)) \leq k(t, s)\|x_1 - x_2\| + \|A_1(t, s)\|\|y_1 - y_2\| + \|A_2(t, s)\|\|z_1 - z_2\|$ при $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^{3n}$. Отсюда следует, что если $A_1(t, s)$ и $A_2(t, s)$ непрерывные $n \times n$ матрицы, $k(\cdot) \in L_\infty[0,1]$, то положив $k_1 = \max\{k(\cdot)\}_\infty$, $\|A_1(\cdot)\|_C, \|A_2(\cdot)\|_C$ имеем, что

$$\rho_x(a(t, s, x_1, y_1, z_1), a(t, s, x_2, y_2, z_2)) \leq k_1(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| + \|z_1 - z_2\|)$$

при $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^{3n}$.

Лемма 2.1. Пусть $u_0(t, s)$ является решением задачи (1), существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $a_0(t, s, w)$ непусто и компактны при $t, s \in [0,1]$, $\|w - u_0(t, s)\| \leq \varepsilon$, $b_1(t, x)$ непусто и компактны при $t \in [0,1]$, $\|x - u_0(t, 0)\| \leq \varepsilon$, $b_2(s, y)$ непусто и компактны при $s \in [0,1]$, $\|y - u_0(0, s)\| \leq \varepsilon$, отображения $w \rightarrow a_0(t, s, w)$, $x \rightarrow b_1(t, x)$, $y \rightarrow b_2(s, y)$ выпуклы и полунепрерывны сверху, отображения $(t, s) \rightarrow a_0(t, s, w)$, $t \rightarrow b_1(t, x)$, $s \rightarrow b_2(s, y)$ измеримы, существуют число $\lambda > 0$ и суммируемые функции $\lambda_1(t) \geq 0$ и $\lambda_2(s) \geq 0$ такие, что $\|a(t, s, w)\| \leq \lambda(1 + \|w\|)$, $\|b_1(t, x)\| \leq \lambda_1(t)(1 + \|x\|)$, $\|b_2(s, y)\| \leq \lambda_2(s)(1 + \|y\|)$ при $w, x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,1]$, $s \in [0,1]$, множество M_0 выпукло, $f_0 : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$, $\varphi_1 : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$, $\varphi_2 : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$

выпуклые нормальные интегранты, $q: R^{4n} \rightarrow R_{+\infty}$ выпуклая функция, существуют числа $c > 0$, $r > 0$ и функции $\alpha(\cdot) \in L_1([0,1] \times [0,1])$, $\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot) \in L_1[0,1]$ такие, что $|f_0(t, s, u_0(t, s) + y, z)| \leq \alpha(t, s) + c\|z\|$, $|\varphi_1(t, u_0(t, 0) + y, z_1)| \leq \alpha_1(t) + c\|z_1\|$, $|\varphi_2(s, u_0(0, s) + y, z_2)| \leq \alpha_2(s) + c\|z_2\|$ при $z, z_1, z_2 \in R^n$, $t \in [0,1]$, $s \in [0,1]$ и $y \in R^n$, $\|y\| \leq r$, функция $q(u_0(0,0), \cdot)$ непрерывна в точке $(u_0(1,0), u_0(0,1), u_0(1,1))$ и $\inf J(u)$ конечно. Тогда задача (3) стабильна.

Доказательство. Из теоремы 3.2.1[3] по условию следует, что функционал

$$J_1(u, z) = \int_0^1 \int_0^1 f_0(t, s, u_0(t, s) + u(t, s), A_1(t, s)(u_{0t}(t, s) + u_t(t, s) + z_t(t, s)) + A_2(t, s)(u_{0s}(t, s) + u_s(t, s) + z_s(t, s)) + u_{0ts}(t, s) + u_{ts}(t, s) + z_{ts}(t, s)) dt ds + \int_0^1 \varphi_1(t, u_0(t, 0) + u(t, 0), u_{0t}(t, 0) + u_t(t, 0) + z_t(t, 0)) dt + \int_0^1 \varphi_2(s, u_0(0, s) + u(0, s), u_{0s}(0, s) + u_s(0, s) + z_s(0, s)) ds + q(u_0(0,0), u_0(1,0) + u(1,0), u_0(0,1) + u(0,1), u_0(1,1) + u(1,1))$$

непрерывен в точке $(0,0)$ относительно топологии пространства

$\bar{A}_1^n([0,1] \times [0,1]) \times \bar{A}_1^n([0,1] \times [0,1])$. Из выпуклости и непрерывности $J_1(u, z)$ в нуле следует, что существуют числа $\alpha > 0$ и k такие, что $J_1(u, z) \leq k$ для $(u, z) \in \bar{A}_1^n([0,1] \times [0,1]) \times \bar{A}_1^n([0,1] \times [0,1])$, $\|(u, z)\|_{\bar{A}_1^n \times \bar{A}_1^n} \leq \alpha$. По следствию 2.1.3[10] для $\frac{\alpha}{2}$

существует $\delta > 0$ такое, что при $z \in \bar{A}_1^n([0,1] \times [0,1])$, $\|z\|_{\bar{A}_1^n} \leq \delta$ существует решение $u_z(t, s)$ задачи

$$A_1(t, s)(u_t(t, s) + z_t(t, s)) + A_2(t, s)(u_s(t, s) + u_s(t, s)) + u_{ts}(t, s) + z_{ts}(t, s) \in a_0(t, s, u(t, s)),$$

$$u_t(t, 0) + z_t(t, 0) \in b_1(t, u(t, 0)), \quad u_s(0, s) + z_s(0, s) \in b_2(s, u(0, s)), \quad u(0, 0) = u_0(0, 0),$$

что $\|u_0 - u_z\|_{\bar{A}_1^n} \leq \frac{\alpha}{2}$. Поэтому получим следующую оценку

$$h(z) = \inf \{ \Phi(u, z) : u \in A_1^n([0,1] \times [0,1]) \} \leq \Phi(u_z, z) \leq k$$

для $z \in \bar{A}_1^n([0,1] \times [0,1])$, $\|z\|_{\bar{A}_1^n} \leq \min\{\frac{\alpha}{2}, \delta\}$. Согласно предложению 1.2.5[14] отсюда следует, что функция h непрерывна в нуле. Тогда используя предложение 1.5.2 [14, с.31] отсюда следует, что h субдифференцируема в точке нуль. Поэтому задача (3) стабильна. Лемма доказана.

Положим

$$Q = \{u \in A_1^n([0,1] \times [0,1]) : \int_0^1 \int_0^1 f_0^0(t, s, u(t, s), p(t, s)) dt ds < +\infty\},$$

$$Q_1 = \{x(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,1] : \int_0^1 \bar{\varphi}_1^0(t, x(t), v_1(t) - \int_0^1 A_1^*(t, s)p(t, s) ds) dt < +\infty\},$$

$$Q_2 = \{y(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,1] : \int_0^1 \bar{\varphi}_2^0(s, y(s), v_2(s)) - \int_0^1 A_2^*(t, s)p(t, s)dt ds < +\infty\}.$$

Теорема 2.1. Пусть $f_0 : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$, $\varphi_1 : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$, $\varphi_2 : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ выпуклые нормальные интегранты, $q : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ выпуклая функция. Для того чтобы $\bar{u}$ являлась точкой минимума функционала $J_0(u)$ среди всех решением задачи (1) достаточно, а если выполняются условия леммы 2.1, $q : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ полунепрерывная снизу функция и множество M_0 замкнуто, то и необходимы, чтобы нашлись функция $p(\cdot) \in L_{\infty}^1([0,1] \times [0,1])$, меры $\lambda \in \text{fm}([0,1] \times [0,1])^n$, $\mu \in \text{fm}[0,1]^n$, $\gamma \in \text{fm}[0,1]^n$, функционал $v^* = (0, v_1(\cdot), v_2(\cdot), v(\cdot)) \in A_1^n([0,1] \times [0,1])^*$ и векторы $(\bar{c}, d_1, d_2, d) \in \mathbb{R}^{4n}$ такие, что

$$1) v^*(u) = (\bar{c} - d_1 - d_2 + d|u(0,0)) + (d_1 - d|u(1,0)) + (d_2 - d|u(0,1)) + (d|u(1,1)) +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 (u(t,s)|d\lambda) + \int_0^1 (u(t,0)|d\mu) + \int_0^1 (u(0,s)|d\gamma) \quad \text{при } u \in A_1^n([0,1] \times [0,1]),$$

$$2) p(t,s) = \int_0^s A_1^*(t,v)p(t,v)dv - \int_0^1 A_1^*(t,s)p(t,s)ds + \int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau - \int_0^1 A_2^*(t,s)p(t,s)dt + v(t,s),$$

$$3) \omega(t,s) \in \partial \bar{f}_0^0(t,s, \bar{u}(t,s), p(t,s)),$$

$$4) \omega_1(t) \in \partial \bar{\varphi}_1^0(t, \bar{u}(t,0), v_1(t) - \int_0^1 A_1^*(t,s)p(t,s)ds),$$

$$5) \omega_2(s) \in \partial \bar{\varphi}_2^0(s, \bar{u}(0,s), v_2(s) - \int_0^1 A_2^*(t,s)p(t,s)dt),$$

$$6) (\bar{c} - d_1 - d_2 + d, d_1 - d, d_2 - d, d) \in \partial \bar{q}(\bar{u}(0,0), \bar{u}(1,0), \bar{u}(0,1), \bar{u}(1,1)),$$

$$7) \bar{f}_0^0(t,s, \bar{u}(t,s), p(t,s)) = (p(t,s)|A_1(t,s)\bar{u}_t(t,s) + A_2(t,s)\bar{u}_s(t,s) + \bar{u}_{ts}(t,s)) + \\ + \bar{f}_0(t,s, \bar{u}(t,s), A_1(t,s)\bar{u}_t(t,s) + A_2(t,s)\bar{u}_s(t,s) + \bar{u}_{ts}(t,s)),$$

$$8) \bar{\varphi}_1^0(t, \bar{u}(t,0), v_1(t) - \int_0^1 A_1^*(t,s)p(t,s)ds) = (v_1(t) - \int_0^1 A_1^*(t,s)p(t,s)ds)|\bar{u}_t(t,0) + \bar{\varphi}_1(t, \bar{u}(t,0), \bar{u}_t(t,0)),$$

$$9) \bar{\varphi}_2^0(s, \bar{u}(0,s), v_2(s) - \int_0^1 A_2^*(t,s)p(t,s)dt) = (v_2(s) - \int_0^1 A_2^*(t,s)p(t,s)dt)|\bar{u}_s(0,s) + \bar{\varphi}_2(s, \bar{u}(0,s), \bar{u}_s(0,s)).$$

$$10) \max_{u \in Q} \int_0^1 \int_0^1 (u(t,s)|d\lambda_s) = \int_0^1 \int_0^1 (\bar{u}(t,s)|d\lambda_s),$$

$$11) \max_{x \in Q_1} \int_0^1 (x(t)|d\mu_s) = \int_0^1 (\bar{u}(t,0)|d\mu_s),$$

$$12) \max_{y \in Q_2} \int_0^1 (y(s)|d\gamma_s) = \int_0^1 (\bar{u}(0,s)|d\gamma_s),$$

где $\lambda(E) = \iint_E \omega(t,s)dt ds + \lambda_s(E)$, $\mu(E_1) = \int_{E_1} \omega_1(t)dt + \mu_s(E_1)$, $\gamma(E_2) = \int_{E_2} \omega_2(s)ds + \gamma_s(E_2)$

Лебеговское разложение λ , μ и γ соответственно, $E \subset ([0,1] \times [0,1])^n$, $E_1 \subset [0,1]^n$, $E_2 \subset [0,1]^n$ - Борелевские множества.

Доказательство. Достаточность теоремы непосредственно проверяется.

Необходимость. Рассмотрим возмущение задачи (3). Поэтому рассмотрим функционал

$$\Phi(u, z) = \int_0^1 \int_0^1 \bar{f}_0(t, s, u(t, s), A_1(t, s)(u_t(t, s) + z_t(t, s)) + A_2(t, s)(u_s(t, s) + z_s(t, s)) + u_{ts}(t, s) + z_{ts}(t, s))dt ds + \\ + \int_0^1 \bar{\varphi}_1(t, u(t, 0), u_t(t, 0) + z_t(t, 0))dt + \int_0^1 \bar{\varphi}_2(s, u(0, s), u_s(0, s) + z_s(0, s))ds + \bar{q}(u(0, 0), u(1, 0), u(0, 1), u(1, 1)),$$

где $z \in \bar{A}_1^n = \{u \in A_1^n([0,1] \times [0,1]) : u(0,0) = 0\}$, $u \in A_1^n([0,1] \times [0,1])$.

Из леммы 4.1 следует, что h субдифференцируема в точке нуль, т.е. задача (3) стабильна. Поэтому из замечания 3.2.3 и из предложения 3.2.4 [14, с. 60, 62] выплывает, что все решения $\bar{u}(\cdot)$ задачи $\inf\{J_0(u) : u \in A_1^n([0,1] \times [0,1])\}$ и все решения $-v^* = -(v_1(\cdot), v_2(\cdot), v(\cdot))$ задачи $\sup\{-\Phi^*(0, \bar{v}^*) : \bar{v}^* \in (\bar{A}_1^n)^*\}$ связаны экстремальным соотношением

$$\Phi(\bar{u}, 0) + \Phi^*(0, -v^*) = 0. \quad (7)$$

Аналогично доказательству теоремы 2.1 [12] существует функция $p(\cdot) \in L_\infty^n([0,1] \times [0,1])$ такая, что

$$p(t, s) = \int_0^s A_1^*(t, v)p(t, v)dv - \int_0^t A_1^*(t, s)p(t, s)ds + \int_0^t A_2^*(\tau, s)p(\tau, s)d\tau - \int_0^1 A_2^*(t, s)p(t, s)dt + v(t, s)$$

и

$$\Phi^*(0, -v^*) = \sup_{u \in A_p^n([0,1] \times [0,1])} \left\{ \int_0^1 (v_1(t)|u_t(t, 0))dt + \int_0^1 (v_2(s)|u_s(0, s))ds + \int_0^1 \int_0^1 (v(t, s)|u_{ts}(t, s))dt ds - \right. \\ \left. - \int_0^1 \int_0^1 \bar{f}_0^0(t, s, u(t, s), p(t, s))dt ds - \int_0^1 \bar{\varphi}_1^0(t, u(t, 0), v_1(t) - \int_0^1 A_1^*(t, s)p(t, s)ds)dt - \right. \\ \left. - \int_0^1 \bar{\varphi}_2^0(s, u(0, s), v_2(s) - \int_0^1 A_2^*(t, s)p(t, s)dt)ds - \bar{q}(u(0, 0), u(1, 0), u(0, 1), u(1, 1)) \right\}.$$

Обозначив $\bar{v}^* = (0, v_1(\cdot), v_2(\cdot), v(\cdot)) \in A_1^n([0,1] \times [0,1])^*$ и

$$J_2(u) = \int_0^1 \int_0^1 \bar{f}_0^0(t, s, u(t, s), p(t, s))dt ds + \int_0^1 \bar{\varphi}_1^0(t, u(t, 0), v_1(t) - \int_0^1 A_1^*(t, s)p(t, s)ds)dt + \\ + \int_0^1 \bar{\varphi}_2^0(s, u(0, s), v_2(s) - \int_0^1 A_2^*(t, s)p(t, s)dt)ds + \bar{q}(u(0, 0), u(1, 0), u(0, 1), u(1, 1))$$

получим, что $\Phi^*(0, -v^*) = J_2^*(\bar{v}^*)$. По условию из предложения 2.5 (см. [4, с. 28]) следует, что $u \rightarrow J_2(u)$ выпуклый функционал. Из соотношения (7) следует, что $J_2^*(\bar{v}^*) + J(\bar{u}) = 0$. Тогда используя неравенство Юнга-Фенхеля (см. [3, с. 183]) получим, что

$$J_2^*(\bar{v}^*) = \int_0^1 (v_1(t)|\bar{u}_t(t, 0))dt + \int_0^1 (v_2(s)|\bar{u}_s(0, s))ds + \int_0^1 \int_0^1 (v(t, s)|\bar{u}_{ts}(t, s))dt ds - J_2(\bar{u}),$$

и

$$J_2(\bar{u}) = \int_0^1 (v_1(t) - \int_0^1 A_1^*(t,s)p(t,s)ds) \bar{u}_t(t,0) dt + \int_0^1 (v_2(s) - \int_0^1 A_2^*(t,s)p(t,s)dt) \bar{u}_s(0,s) ds + \\ + \int_0^1 \int_0^1 (A_1(t,s)z_t(t,s) + A_2(t,s)z_s(t,s) + z_{ts}(t,s)) p(t,s) dt ds + J(\bar{u}),$$

$$\text{где } p(t,s) = \int_0^s A_1^*(t,v)p(t,v)dv - \int_0^1 A_1^*(t,s)p(t,s)ds + \int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau - \int_0^1 A_2^*(t,s)p(t,s)dt + v(t,s).$$

Из первого равенства следует, что $\bar{v}^* \in \partial J_2(\bar{u})$. Из второго равенства имеем

$$f_0^0(t,s,\bar{u}(t,s),p(t,s)) = (p(t,s) | A_1(t,s)\bar{u}_t(t,s) + A_2(t,s)\bar{u}_s(t,s) + \bar{u}_{ts}(t,s)) + \\ + \bar{f}_0(t,s,\bar{u}(t,s),A_1(t,s)\bar{u}_t(t,s) + A_2(t,s)\bar{u}_s(t,s) + \bar{u}_{ts}(t,s)),$$

$$\varphi_1^0(t,\bar{u}(t,0),v_1(t) - \int_0^1 A_1^*(t,s)p(t,s)ds) = (v_1(t) - \int_0^1 A_1^*(t,s)p(t,s)ds) | \bar{u}_t(t,0) + \bar{\varphi}_1(t,\bar{u}(t,0),\bar{u}_t(t,0)),$$

$$\varphi_2^0(s,\bar{u}(0,s),v_2(s) - \int_0^1 A_2^*(t,s)p(t,s)dt) = (v_2(s) - \int_0^1 A_2^*(t,s)p(t,s)dt) | \bar{u}_s(0,s) + \bar{\varphi}_2(s,\bar{u}(0,s),\bar{u}_s(0,s)).$$

Так как для любого $\tilde{p}(\cdot) \in L_\infty^n([0,1] \times [0,1])$, $z_1(\cdot) \in L_\infty^n[0,1]$ и $z_2(\cdot) \in L_\infty^n[0,1]$ верны соотношения

$$\bar{f}_0^0(t,s,\tilde{u}(t,s) + y, \tilde{p}(t,s)) \leq (A_1(t,s)\tilde{u}_t(t,s) + A_2(t,s)\tilde{u}_s(t,s) + \tilde{u}_{ts}(t,s)) | \tilde{p}(t,s) + \\ + \bar{f}_0(t,s,\tilde{u}(t,s) + y, A_1(t,s)\tilde{u}_t(t,s) + A_2(t,s)\tilde{u}_s(t,s) + \tilde{u}_{ts}(t,s)), \\ \bar{\varphi}_1^0(t,\tilde{u}(t,0) + y; z_1(t)) \leq (\tilde{u}_t(t,0) | z_1(t)) + \bar{\varphi}_1(t,\tilde{u}(t,0) + y, \tilde{u}_t(t,0)), \\ \bar{\varphi}_2^0(s,\tilde{u}(0,s) + y; z_2(s)) \leq (\tilde{u}_s(0,s) | z_2(s)) + \bar{\varphi}_2(s,\tilde{u}(0,s) + y, \tilde{u}_s(0,s))$$

при $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\| \leq r$ и число $J_2(\tilde{u})$ конечно, то по условию имеем, что для функционала $J_2(u)$ удовлетворяются условия теоремы 2.1[12]. Применяя теорему 2.1[12] или теорему 6.1 [13] к $J_2(u)$ в точке $\bar{u}$ получим справедливость теоремы 2.1. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть $f_0 : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$, $\varphi_1 : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$, $\varphi_2 : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ выпуклые нормальные интегранты, $q : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ выпуклая функция. Для того чтобы $\bar{u}$ являлась точкой минимума функционала $J(u)$ на пространстве $A_1^n([0,1] \times [0,1])$ достаточно, а если при $\tilde{u}(t,s) = \bar{u}(t,s)$ удовлетворяются условия леммы 2.1, $q : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ полунепрерывная снизу функция и множество M_0 замкнуто и необходимо, чтобы нашлись функции

$$p(\cdot) \in L_\infty^n([0,1] \times [0,1]), v(\cdot) \in A_1^n([0,1] \times [0,1]), \quad v_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,1], \quad v_2(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,1] \quad \text{и} \\ v(1,s) = v(t,1) = \text{const} \quad \text{при } t \in [0,1], s \in [0,1] \quad \text{такие, что}$$

$$1) \quad v_{ts}(t,s) \in \partial \bar{f}_0^0(t,s,\bar{u}(t,s), p(t,s)),$$

$$2) \quad p(t,s) = \int_0^s A_1^*(t,v)p(t,v)dv - \int_0^1 A_1^*(t,s)p(t,s)ds + \int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau - \int_0^1 A_2^*(t,s)p(t,s)dt + v(t,s),$$

- 3)
$$v_1(t,0) - \dot{v}_1(t) \in \partial \bar{\varphi}_1^0(t, \bar{u}(t,0), v_1(t) - \int_0^1 A_1^*(t,s)p(t,s)ds),$$
- 4)
$$v_s(0,s) - \dot{v}_2(s) \in \partial \bar{\varphi}_2^0(s, \bar{u}(0,s), v_2(s) - \int_0^1 A_2^*(t,s)p(t,s)dt),$$
- 5) $(v(0,0) - v_1(0) - v_2(0), v_1(1) - v(1,0), v_2(1) - v(0,1), v(1,1)) \in \partial \bar{q}(\bar{u}(0,0), \bar{u}(1,0), \bar{u}(0,1), \bar{u}(1,1)),$
- 6)
$$\bar{f}_0^0(t,s, \bar{u}(t,s), p(t,s)) = (p(t,s) | A_1(t,s) \bar{u}_t(t,s) + A_2(t,s) \bar{u}_s(t,s) + \bar{u}_{ts}(t,s)) + \\ + \bar{f}_0(t,s, \bar{u}(t,s), A_1(t,s) \bar{u}_t(t,s) + A_2(t,s) \bar{u}_s(t,s) + \bar{u}_{ts}(t,s)),$$
- 7)
$$\bar{\varphi}_1^0(t, \bar{u}(t,0), v_1(t) - \int_0^1 A_1^*(t,s)p(t,s)ds) = (v_1(t) - \int_0^1 A_1^*(t,s)p(t,s)ds | \bar{u}_t(t,0)) + \bar{\varphi}_1(t, \bar{u}(t,0), \bar{u}_t(t,0)),$$
- 8)
$$\bar{\varphi}_2^0(s, \bar{u}(0,s), v_2(s) - \int_0^1 A_2^*(t,s)p(t,s)dt) = (v_2(s) - \int_0^1 A_2^*(t,s)p(t,s)dt | \bar{u}_s(0,s)) + \bar{\varphi}_2(s, \bar{u}(0,s), \bar{u}_s(0,s)).$$

Доказательство. Достаточность теоремы непосредственно проверяется.

Необходимость. Если положив $\tilde{u}(t,s) = \bar{u}(t,s)$, то теорема 2.2 доказывается аналогично теореме 2.1. Аналогично теореме 2.1 проверяется для функционала $J_2(u)$ удовлетворяются условия теоремы 2.2[12]. Применяя теорему 2.2[12] к $J_2(u)$ в точке $\bar{u}$ получим, что существуют $p(\cdot) \in L_\infty^n([0,1] \times [0,1])$, $v(\cdot) \in A_1^n([0,1] \times [0,1])$, $v_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,1]$, $v_2(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,1]$ и $v(1,s) = v(t,1) = \text{const}$ при $t \in [0,1]$, $s \in [0,1]$ такие, что выполняются соотношения 1)-8) теоремы 2.2.

Замечание 2.3. Если $\bar{f}_0 : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$, $\bar{\varphi}_1 : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$, $\bar{\varphi}_2 : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ нормальные интегранты, $\bar{q} : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ собственная функция и выполняются соотношения 1)-12) теоремы 2.1, то $\bar{u}$ также является точкой минимума функционала $J(u)$ на пространстве $A_1^n([0,1] \times [0,1])$.

Замечание 2.4. Если $A_1(t,s) = 0$, $A_2(t,s) = 0$, то из равенства

$$p(t,s) = \int_0^s A_1^*(t,v)p(t,v)dv - \int_0^1 A_1^*(t,s)p(t,s)ds + \int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau - \int_0^1 A_2^*(t,s)p(t,s)dt + v(t,s)$$

следует, что $p(t,s) = v(t,s)$ при $(t,s) \in [0,T] \times [0,S]$. Поэтому если $A_1(t,s) = 0$, $A_2(t,s) = 0$, то положив $p(t,s) = v(t,s)$ из теоремы 2.1 можно получить необходимое и достаточное условие для минимизации функционала $J(u)$ в пространстве $A_1^n([0,1] \times [0,1])$.

Используя лемму 2.1[12] теоремы 2.2 можно написать в следующем виде.

Теорема 2.3. Пусть $\bar{f}_0 : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$, $\bar{\varphi}_1 : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$, $\bar{\varphi}_2 : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ выпуклые нормальные интегранты, $\bar{q} : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ выпуклая функция. Для того чтобы $\bar{u}$ являлась точкой минимума функционала $J(u)$ на

пространстве $A_p^n([0,1] \times [0,1]), 1 \leq p < \infty$, достаточно, а если при $\tilde{u}(t,s) = \bar{u}(t,s)$ удовлетворяются условия теоремы 2.1, и необходимо, чтобы нашлись функции $p(\cdot) \in L_\infty^n([0,1] \times [0,1]), v(\cdot) \in A_1^n([0,1] \times [0,1]), v_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,1], v_2(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,1]$ и $v(1,s) = v(t,1) = \text{const}$ при $t \in [0, T], s \in [0, S]$ такие, что

- 1) $(v_{ts}(t,s), -p(t,s)) \in \partial \bar{f}_0(t,s, \bar{u}(t,s), A_1(t,s) \bar{u}_t(t,s) + A_2(t,s) \bar{u}_s(t,s) + \bar{u}_{ts}(t,s))$,
- 2) $p(t,s) = \int_0^s A_1^*(t,v) p(t,v) dv - \int_0^1 A_1^*(t,s) p(t,s) ds + \int_0^t A_2^*(\tau,s) p(\tau,s) d\tau - \int_0^1 A_2^*(t,s) p(t,s) dt + v(t,s)$,
- 3) $(v_t(t,0) - \dot{v}_1(t), \int_0^1 A_1^*(t,s) p(t,s) ds - v_1(t)) \in \partial \bar{\varphi}_1(t, \bar{u}(t,0), \bar{u}_t(t,0))$,
- 4) $(v_s(0,s) - \dot{v}_2(s), \int_0^1 A_2^*(t,s) p(t,s) dt - v_2(s)) \in \partial \bar{\varphi}_2(s, \bar{u}(0,s), \bar{u}_s(0,s))$,
- 5) $(v(0,0) - v_1(0) - v_2(0), v_1(1) - v(1,0), v_2(1) - v(0,1), v(1,1)) \in \partial \bar{q}(\bar{u}(0,0), \bar{u}(1,0), \bar{u}(0,1), \bar{u}(1,1))$.

3. Заключение. В работе рассматривается выпуклая экстремальная задача для дифференциальных включений типа Гурса-Дарбу специального вида и получено необходимое и достаточное условие экстремума.

Литература

1. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д. и др. Введение в теорию многозначных отображений, Воронеж, (1986), 103 с.
2. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями, Наука, Москва, (1977), 624 с.
3. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач, Наука, Москва, (1974), 479 с.
4. Обен Ж.П. Нелинейный анализ и его экономические приложения, Мир, Москва, (1988), 264 с.
5. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи, Наука, Москва, (1980), 319 с.
6. Садыгов М.А. Свойства оптимальных траекторий дифференциальных включений, Канд. дис. Баку, (1983), 116 с.
7. Садыгов М.А. О минимизации интегральных функционалов в пространствах Соболева, Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, №6, (1985), сс.33-47.
8. Садыгов М.А. Об экстремальные задачи для двумерных дифференциальных включений, Изв. АН Азербайджана, сер. физ.-техн. и матем. наук, №1-3, (1995), сс.71-81.
9. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем, Азерб. Технический Университет, Баку, (1996), 148 с.
10. Садыгов М.А. Негладкий анализ и его приложения к экстремальной задаче для включения типа Гурса-Дарбу, Элм, Баку, (1999), 135 с.

11. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для включений в частных Производных, LAP LAMBERT Academic Publishing, Deutschland, (2015), 390 с.
12. Садыгов М.А. Об экстремальной задаче типа Гурса-Дарбу, Proceedings of IAM, V.12, № 1, (2024), сс.90-107.
13. Садыгов М.А. О субдифференциале функционала типа Гурса-Дарбу, Annali d' Italia, №42, (2024), сс.32-49.
14. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы, Мир, Москва, (1979), 400 с.
15. Tuan H.D. On solution sets of nonconvex Darboux problems and applications to optimal control with endpoint constraints, J.Austral. Math. Soc. Ser.B 37, (1996), pp.354-391.

EXTREMAL PROBLEM FOR CONVEX DIFFERENTIAL INCLUSIONS OF A SPECIAL FORM GOURSAT-DARBOUX TYPE

M.A. Sadygov

Institute of Applied Mathematics of Baku State University, Baku, Azerbaijan
e-mail:misreddin08@rambler.ru

Abstract. The paper considers a convex extremal problem for differential inclusions of Goursat-Darboux type of a special type and obtains a necessary and sufficient condition for the optimality of its solution. In a convex extremal problem for differential inclusions of Goursat-Darboux type, the perturbed problem is first considered, the dual problem is constructed with its help, and finally, using a subdifferential of a functional of a special form in the space of absolutely continuous and two-dimensional absolutely continuous functions, a necessary and sufficient condition for the extremum is obtained.

Keywords: Mapping, Banach space, inclusion, function.

References

1. Borisovich YU.G., Gel'man B.D. i dr. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyh otobrazhenij, Voronezh, (1986), 103 s.(Borisovich Yu.G., Gelman B.D. et al. Introduction to the Theory of Multivalued Mappings, Voronezh, (1986), 103 p.)
2. Varga Dzh. Optimal'noe upravlenie differencial'nymi i funkcional'nymi uravneniyami, Nauka, Moskva, (1977), 624 s (Varga J. Optimal control of differential and functional equations, Nauka, Moscow, (1977), 624 p.)
3. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. Teoriya ekstremal'nyh zadach, Nauka, Moskva, (1974), 479 s. (Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. Theory of Extremal Problems, Nauka, Moscow, (1974), 479 p.)

4. Oben ZH.P. Nelinejnyj analiz i ego ekonomicheskie prilozheniya, Mir, Moskva, (1988), 264 s. (Oben J.P. Nonlinear analysis and its economic applications, Mir, Moscow, (1988), 264 p.)
5. Pshenichnyj B.N. Vypuklyj analiz i ekstremal'nye zadachi, Nauka, Moskva, (1980), 319 s. (Pshenichny B.N. Convex analysis and extremal problems, Nauka, Moscow, (1980), 319 p..)
6. Sadygov M.A. Svoystva optimal'nyh traektorij differencial'nyh vkl'yuchenij, Kand. dis. Baku, (1983), 116 s. (Sadygov M.A. Properties of optimal trajectories of differential inclusions, Ph.D. diss. Baku, (1983), 116 p.).
7. Sadygov M.A. O minimizacii integral'nyh funkcionalov v prostranstvakh Soboleva, Izv. AN Azerb. SSR, ser.fiz.-tekhn. i matem. nauk, №6, (1985), ss.33-47. (Sadygov M.A. On minimization of integral functionals in Sobolev spaces, Izvestiya AN Azerb. SSR, Ser. phys.-tech. i mat. nauk, No. 6, (1985), pp. 33-47.)
8. Sadygov M.A. Ob ekstremal'nye zadachi dlya dvumernykh differencial'nykh vkl'yuchenij, Izv. AN Azerbajdzhana, ser.fiz.-tekhn. i matem. nauk, №1-3, (1995), ss.71-81. (Sadygov M.A. On extremal problems for two-dimensional differential inclusions, Izvestiya AN Azerbaijan, Ser. phys.-tech. i mathematic. nauk, No. 1-3, (1995), pp. 71-81.)
9. Sadygov M.A. Ekstremal'nye zadachi dlya negladkih sistem, Azerb. Tekhnicheskij Universitet, Baku, (1996), 148 s. (Sadygov M.A. Extremal problems for non-smooth systems, Azerbaijan Technical University, Baku, (1996), 148 p.)
10. Sadygov M.A. Negladkij analiz i ego prilozheniya k ekstremal'noj zadache dlya vkl'yucheniya tipa Gursa-Darbu, Elm, Baku, (1999), 135 s. (Sadygov M.A. Non-smooth analysis and its applications to the extremal problem for inclusion of Goursat-Darboux type, Elm, Baku, (1999), 135 p.)
11. Sadygov M.A. Ekstremal'nye zadachi dlya vkl'yuchenij v chastnykh Proizvodnykh, LAP LAMBERT Academic Publishing, Deutschland, (2015), 390 s. (Sadygov M.A. Extremal problems for inclusions in partial derivatives, LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany, (2015), 390 p..)
12. Sadygov M.A. Ob ekstremal'noj zadache tipa Gursa-Darbu, Proceedings of IAM, V.12, № 1, (2024), ss.90-107. (Sadygov M.A. On an extremal problem of Goursat-Darboux type, Proceedings of IAM, V.12, No. 1, (2024), pp.90-107.)
13. Sadygov M.A. O subdifferenciale funkcionala tipa Gursa-Darbu, Annali Italia, №42, (2024), ss.32-49. (Sadygov M.A. On the subdifferential of a functional of Goursat-Darboux type, Annali Italia, No. 42, (2024), pp. 32-49.)
14. Ekländ I., Temam R. Vypuklyj analiz i variacionnye problemy, Mir, Moskva, (1979), 400 s. (Ekländ I., Temam R. Convex Analysis and Variational Problems, Mir, Moscow, (1979), 400 p..)
15. Tuan H.D. On solution sets of nonconvex Darboux problems and applications to optimal control with endpoint constraints, J.Austral. Math. Soc. Ser.B 37, (1996), pp.354-391.